

Orbisacks and Orbitopes

Andreas Loos

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik / IMO
Universitätsplatz 2
39106 Magdeburg
loos@math.uni-magdeburg.de

Symmetrie ist ein allgegenwärtiges Problem in der ganzzahligen Programmierung. Unser Ansatz, Symmetrie zu brechen, betrifft ganzzahlige Programme mit 0/1-Lösungen, die eine bestimmte Struktur aufweisen: Die Lösungsvektoren können in eine matrixartige Struktur mit p Zeilen und q Spalten zerlegt werden und die Probleme sind symmetrisch in Kostenfunktion und Spalten, das heißt: Eine Permutation der Spalten der Lösungen und der entsprechenden Koeffizienten der Zielfunktion ergibt denselben Zielfunktionswert. Das Graphenfärbungsproblem lässt sich zum Beispiel so modellieren.

Offensichtlich reicht es in diesen Fällen für die Optimierung, sich auf Repräsentanten in jedem Orbit zu konzentrieren. Dazu wählen wir den jeweils lexikographisch größten Kandidaten aus; die konvexe Hülle darüber heißt das „volle Orbitop“ $\text{orb}(p, q)$. Unser Ziel ist eine vollständige Beschreibung des vollen Orbitops.

Es zeigt sich, dass das Orbitop mit zwei Spalten in Wirklichkeit ein spezielles Knapsack-Problem ist. Der so genannte „Orbisack“ lässt sich gut beschreiben: Wir haben die Struktur seiner Seitenflächen und der Adjazenzen seiner Ecken bewiesen und gezeigt, dass für die Kantenexpansion gilt: $\chi(G_{\text{orb}(p,q)}) \geq 1$. Letzteres ist eine weitere Bestätigung der Vermutung von Mihail und Vazirani über die Kantenexpansion bei 0/1-Polytopen.

Für Orbitope in beliebiger Dimension haben wir einen polynomiellen Optimierungsalgorithmus gefunden. Darauf aufbauend haben wir eine erweiterte Formulierung entwickelt.